GRUP MATRIKS ORTOGONAL

TESIS

GUNAWAN
06215097

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS
2008

GRUP MATRIKS ORTOGONAL

Oleh : Gunawan

(Di bawah bimbingan Dr.Muhafzan, M.Si. dan Nova Noliza Bakar, M.Si)

RINGKASAN

Konsep grup mulai dikenal setelah E.Galois, seorang ilmuan Perancis (1811-1832) dapat membuktikan suatu teori bahwa persamaan polinom dengan pangkat lebih besar atau sama dengan 5, tidak mungkin dapat diselesaikan dengan radikal, dan pembuktiannya memperkenalkan suatu grup permutasi tertentu

Pada perkembangannya, teori grup banyak digunakan pada pengembangan geometri, analisis, dan topologi. Pada abad dua puluhan, teori grup dipakai diberbagai bidang pada fisika seperti Kristalografi, Quantum Mekanik dan teori Partikel

Untuk lebih memahami tentang konsep grup ini, Penulis membahas suatu sifat grup yaitu grup matriks ortogonal.

Misalkan A adalah suatu matriks nxn, A disebut matriks ortogonal jika $A^t = A^{-1}$ atau $A^tA = AA^t = I$

Adapun sifat-sifat grup yang dibahas dalam tesis ini adalah:

Jika O(n,R) menyatakan himpunan semua matriks nxn yang ortogonal, apakah O(n,R) merupakah subgrup dari grup matriks nxn yang determinannya tidak nol? yaitu apakah O(n,R) membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks? Pada penelitian ini akan dibahas fakta-fakta yang berkaitan dengan O(n,R).

Adapun kesimpulan yang dapat di ambil dari pembahasan grup matriks ortogonal ini adalah:

1. Jika A matriks ortogonal maka det (A) = ± 1.
2. Jika **O(n,R)** menyatakan himpunan matriks ortogonal nxn dengan entri-entri bilangan riel, maka **O(n,R)** membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks.
3. Jika A adalah matriks kuadrat yang determinannya tidak sama dengan nol maka A membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks.
4. Matriks Ortogonal merupakan subgrup dari Matriks kuadrat yang determinannya tidak sama dengan nol.
5. Jika $M \in$ **O(n,R)** dengan det(M) = 1 dan M tetap, maka pemetaan f : **O(n,R)** $\rightarrow$ **O(n,R)**, dengan $f(A) = MAM^{-1}$ untuk setiap $A \in$ **O(n,R)** merupakan pemetaan isomofisma.
6. Jika **SO(n,R)** merupakan himpunan semua matriks ortogonal yang determinannya sama dengan satu maka **SO(n,R)** merupakan subgrup normal dari **O(n,R).**
7. Misalkan **G = O(n,R)** dan **N = SO(n,R)** grup faktor dari **G** oleh **N** adalah **G/N** = {**NA** | A∈**G**} , Periode dari **N** dan **NA** masing-masing adalah 1 dan 2.

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis yang saya tulis ini dengan judul **"Grup Matriks Orthogonal"** adalah hasil karya sendiri dan bukan merupakan ciplakan karya orang lain, kecuali kutipan yang sumbernya dicantumkan.

Jika dikemudian hari pernyataan yang saya buat ini ternyata tidak benar, maka status kelulusan dan gelar yang saya peroleh menjadi batal dengan sendirinya.

Padang, Juli 2008

Yang membuat Pernyataan

GUNAWAN

BP. 06 215 097

GRUP MATRIKS ORTOGONAL

Oleh :

GUNAWAN
NIM : 06215097

TESIS

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Magister Sain pada Program Pascasarjana
Universitas Andalas

PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS ANDALAS

Judul Penelitian	:	**GRUP MATRIKS ORTOGONAL**
Nama Mahasiswa	:	**GUNAWAN**
Nomor Buku Pokok	:	**06215097**
Program Studi	:	**MATEMATIKA**

Tesis ini telah diuji dan dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Akhir Magister Sain pada Program Pascasarjana Universitas Andalas dan dinyatakan lulus pada tanggal 19 Juli 2008

Menyetujui

1. Komisi Pembimbing

Ketua	**Anggota**
Dr.MUHAFZAN, M.Si.	**NOVA NOLIZA BAKAR, M.Si.**
NIP. 132 046 381	**NIP. 131 994 389**

2. Ketua Program Studi	**3. Direktur Program Pascasarjana**
JENIZON, M.Si.	**Prof.Dr.Ir.H.NOVIRMAN JAMARUN, M.Sc.**
NIP.132 206 780	**NIP.130 819 552**

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL UNIVERSITAS ANDALAS PROGRAM PASCASARJANA UNIVERSITAS

Allah akan meninggikan
Orang – orang yang beriman dan
Orang – orang yang diberi ilmu pengetahuan
Beberapa derajat
(Alqur'an surat Mujaadalah ayat 11)

Kupersembahkan
Karya sederhana ini untuk
Istriku Ermi Erawati serta anak-anakku tercinta
Findri Wara Putri dan Zikril Hudha Amanda

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 17 Oktober 1968 di Kota Majidin Kabupaten Kerinci, sebagai anak ke enam dari Bapak Ujud dan Ibu Aman Nabi. Penulis menamatkan SD pada tahun 1982, SMP tahun 1985 dan SMA pada tahun 1988 di Kerinci. Penulis memperoleh gelar Sarjana Pendidikan pada program studi Matematika IKIP Padang tahun 1994.

Sejak tahun bulan Oktober 1993 sampai Januari 2008 penulis ditugaskan sebagai guru matematika di SMA Negeri 1 Lubuksikaping dan sejak bulan Pebruari 2008 sampai sekarang penulis di tugaskan pada Dinas Pendidikan Kabupaten Pasaman. Pada tahun 2006 memperoleh kesempatan meneruskan pendidikan pada program Pascasarjana Universita Andalas di Padang.

KATA PENGANTAR

Puji syukur Penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah memberikan kemudahan, sehingga dapat menyelesaikan tesis ini yang merupakan salah satu syarat untuk mencapai Magister Sain pada Program Studi Matematika Program Pascasarjana Universitas Andalas.

Dalam kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Prof.Dr.Ir.H.Novirman Jamarun, M.Sc. selaku Direktur Program Pascasarjana Universitas Andalas yang telah memberi izin kepada penulis untuk mengikuti pendidikan.
2. Bapak Dr.Muhafzan, M.Si.dan Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si. selaku pembimbing yang telah meluangkan waktu dan memberikan banyak arahan kepada penulis sehingga selesainya tesis ini.
3. Bapak dan Ibu dosen serta karyawan pada Program Studi Matematika Program Pascasarjana Universitas Andalas yang telah memberi bekal pengetahuan selama penulis mengikuti pendidikan.
4. Orang tua, istri dan anak-anak tercinta yang telah memberikan semangat dan doa restu hingga penulis dapat menyelesaikan tugas berat ini.
5. Rekan-rekan mahasiswa S2 Program Studi Matematika Program Pascasarjana Universitas Andalas yang telah membantu penulis, baik selama mengikuti perkuliahan maupun dalam mendiskusikan materi tesis ini.

6. Teristimewa penulis ucapkan terima kasih kepada Bapak Dr.I.Made Arnawa, M.Si. dan rekan-rekan Mahasiswa S2 dari Lubuksikaping yang selalu memberikan semangat kepada penulis untuk menyelesaikan tesis ini.
7. Semua pihak yang tidak dapat penulis tuliskan satu persatu.

Akhirnya penulis berharap, semoga tulisan ini memberi mamfaat. Saran dan kritik penulis harapkan demi kesempurnaan tulisan ini.

Padang, 24 Juli 2008

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

UNIVERSITAS ANDALAS

UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar abstrak merupakan bentuk perumuman dari bentuk aljabar yang diajarkan pada tingkat persekolahan (sekolah dasar dan menengah), Pada tingkat persekolahan dipandang bahwa aljabar bilangan, aljabar fungsi, dan aljabar matriks sebagai hal yang berbeda, tetapi sebenarnya terdapat struktur yang sama diantara bentuk-bentuk aljabar tersebut, yaitu mempunyai struktur grup.

Konsep grup mulai dikenal setelah E.Galois, seorang ilmuan Perancis (1811-1832) dapat membuktikan suatu teori bahwa persamaan polinom dengan pangkat lebih besar atau sama dengan 5, tidak mungkin dapat diselesaikan dengan radikal, dan pembuktiannya memperkenalkan suatu grup permutasi tertentu (Mukhlisah Nurul,2005).

Pada perkembangannya, teori grup banyak digunakan pada pengembangan geometri, analisis, dan topologi. Pada abad dua puluhan, teori grup dipakai diberbagai bidang pada fisika seperti Kristalografi, Quantum Mekanik dan teori Partikel (Mukhlisah Nurul,2005).

Untuk lebih memahami tentang konsep grup ini, Penulis membahas suatu sifat grup yaitu grup matriks ortogonal. Menurut Khanna & Bhambri (1993), himpunan semua matriks nxm membentuk grup terhadap operasi penjumlahan matriks, dan himpunan semua matriks nxn dengan determinan tak nol membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks.

Misalkan A adalah suatu matriks nxn, A disebut matriks ortogonal jika $A^t = A^{-1}$ atau $A^tA = AA^t = I$ (Anton & Rorres, 2004). Jika O(n,R) menyatakan himpunan semua matriks nxn yang ortogonal, apakah O(n,R) merupakah subgrup dari grup matriks nxn yang determinannya tidak nol? yaitu apakah O(n,R) membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks? Pada penelitian ini akan dibahas fakta-fakta yang berkaitan dengan O(n,R).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah sifat sifat apa saja yang dimiliki oleh grup matrik ortogonal.

Masalah yang dibahas dalam tulisan ini dibatasi tentang Grup dari matriks yang determinannya tidak nol, Subgrup, Koset, subgrup normal, grup faktor, pemetaan homomorfisma dan periode suatu unsur pada grup faktor.

1.3 Manfaat Penulisan

Penulisan ini diharapkan dapat memperluas wawasan penulis maupun pembaca dalam memahami grup terutama grup matriks ortogonal.

1.4 Tujuan Penulisan

Tulisan ini bertujuan untuk mengetahui tentang sifat-sifat grup matriks ortogonal.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan dibahas mengenai beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan grup dan matriks ortogonal, yaitu : Grup, Subgrup, Koset, subgrup normal, grup faktor, pemetaan homomorfisma dan periode suatu unsur pada grup faktor.

2.1. Matriks Ortogonal

Definisi 2.1.1 [Anton dan Rorres,2004]

Sebuah matriks bujursangkar A dengan entri-entri kompleks di sebut ortogonal (uniter) jika $A^{-1} = A^t$.

Teorema 2.1.2 [Anton dan Rorres,2004]

Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan entri-entri bilangan kompleks dan k adalah sebarang bilangan kompleks, maka:

(a) $(A^t)^t = A$

(b) $(A + B)^t = A^t + B^t$

(c) $(kA)^t = kA^t$

(d) $(AB)^t = B^tA^t$

Definisi 2.1.3 [Anton dan Rorres,2004]

Sebuah matriks bujursangkar A dengan entri-entri kompleks dikatakan secara ortogonal dapat didiagonalisasi apabila terdapat sebuah matriks ortogonal P yang sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ (P^*AP) adalah matriks diagonal, matriks P dikatakan secara ortogonal mendiagonalisasi A.

Teorema 2.1.4 (Anton dan Rorres, 2004)

Jika A dan B adalah matriks kuadrat yang ukurannya sama, maka det(AB) = det(A)det(B).

2.2. Grup

Definisi 2.2.1 [Herstein, 1990]

Himpunan tak kosong G dikatakan membentuk grup terhadap operasi *, jika G terhadap operasi * memenuhi:

1. Setiap a, b $\in$ G berlaku a*b$\in$ G
2. Setiap a, b, c$\in$ G berlaku (a*b)*c = a*(b*c)
3. Terdapat satu unsur di G yang ditulis sebagai e sehingga a*e = e*a = a untuk setiap a$\in$ G
4. Setiap a$\in$ G terdapat satu unsur b di G sehingga a*b = b*a = e

Teorema 2.2.2 [Herstei, 1990]

Misalkan G suatu grup dan a, b, u, w$\in$ G. Maka berlaku hukum pembatalan kiri dan kanan di G, yaitu : jika a u = a w maka u = w dan jika ua = wa maka u = w.

Bukti

Misalkan G suatu grup.

Ambil a,b,u,w $\in$ G sebarang dengan a.u = a.w. Karena G grup dan a $\in$ G maka terdapat $a^{-1} \in$ G sehingga $a.a^{-1} = e$

Perhatikan bahwa :

$$a * u = a * w$$

$$a^{-1} *(a * u) = a^{-1} *(a * w)$$

$$(a^{-1} * a) * u = (a^{-1} * a) * w$$

$e * u = e * w$

$u = w$

Karena a, b, u, w $\in$ G diambil sebarang maka dapat disimpulkan bahwa setiap a, b, u, w $\in$ G dengan a.u = a.w berlaku u = w. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa jika u*b = w*b maka u = w

Definisi 2.2.3 [Herstein, 1990]

Misalkan G suatu grup dengan unsur identitas e dan $a \in G$. Bilangan bulat positif terkecil n yang memenuhi $a^n = e$ disebut periode dari a dan dinotasikan sebagai p(a).

Definisi 2.2.4 [Khanna dan Bhambri, 1993]

Misalkan G suatu grup dan H himpunan bagian tak kosong dari G. H disebut subgrup dari G jika H membentuk grup terhadap operasi biner yang ada di G.

Teorema 2.2.5 [Herstein, 1975]

Misalkan (G, *) suatu grup, H subgrup dari G dan setiap a,b $\in$ G maka

1. $a * H = b * H$ jika dan hanya jika $a^{-1}.b \in H$
2. $H * a = H * b$ jika dan hanya jika $a.b^{-1} \in H$

Bukti

1. ($\Rightarrow$) Misalkan (G, *) suatu grup, H subgrup dari G. Misal a,b $\in$ G, dan $a * H = b * H$ akan ditunjukkan $a^{-1} * b \in H$.

   Karena $a * H = b * H$ maka $a * h_1 = b * h_2$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$.

   Perhatikan bahwa :

   $b * h_2 = a * h_1$

   $(b * h_2) * h_2^{-1} = (a * h_1) * h_2^{-1}$

$b * (h_2 * h_2^{-1}) = (a * h_1) * h_2^{-1}$

$b * e = (a * h_1) * h_2^{-1}$

$b = a * h_1 * h_2^{-1}$

$a^{-1} * b = a^{-1} * a * h_1 * h_2^{-1}$

$a^{-1} * b = h_1 * h_2^{-1}$

Karena H subgrup maka $h_1 * h_2^{-1} \in H$ sehingga $a^{-1} * b \in H$

($\Leftarrow$) Misalkan $a,b \in H$, Akan ditunjukkan $a * H = b * H$, yaitu :

i. $a * H \subseteq b * H$

ii. $b * H \subseteq a * H$

i. Ambil sebarang $x \in a * H$. Akan ditunjukkan $x \in b * H$

Karena $x \in a * H$ maka $x = a * h_1$ untuk suatu $h_1 \in H$

Karena $a^{-1} * b \in H$ maka $a^{-1} * b = h_2$ untuk suatu $h_2 \in H$

Perhatikan bahwa :

$a^{-1} * b = h_2$ untuk suatu $h_2 \in H$

$a^{-1} = h_2 * b^{-1}$

$(a^{-1})^{-1} = (h_2 * b^{-1})^{-1}$

$a = (b^{-1})^{-1} * h_2^{-1}$

$a = b * h_2^{-1}$

karena $x = a * h_1$ dan $a = b * h_2^{-1}$ maka

$x = a * h_1$

$x = b * h_2^{-1} * h_1$

$x = b * h_3$, untuk suatu $h_3 \in H$

Ini berarti $x = b * h_3 \in \{ b * h \mid h \in H \} = b*H$

Karena $x \in a * H$ diambil sebarang maka dapat disimpulkan setiap $x \in a*H$ maka $x \in b*h$ yaitu $a * H \subseteq b * H$

ii. Ambil sebarang $x \in b * H$ akan ditunjukkan $x \in a * H$

Karena $x \in b*H$ maka $x = b * h_1$ untuk suatu $h_1 \in H$

Karena $a^{-1}*b \in H$ maka $a^{-1}*b = h_2$ untuk suatu $h_2 \in H$

Perhatikan bahwa :

$a^{-1} * b = h_2$

$b = a * h_2$

karena $x = b * h_1$ dan $b = a * h_2$ maka

$x = b * h_1 = a * h_2 * h_1$

$= a * h_3$, untuk suatu $h_3 \in H$

Ini berarti $x = a * h_3 \in \{ a*h \mid h \in H\} = a * H$

Karena $x \in b*H$ diambil sebarang maka dapat disimpulkan setiap $x \in b*H$ maka $x \in a.H$ yaitu $b*H \subseteq a*H$

Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa : $H * a = H * b$ jika dan hanya jika $a*b^{-1} \in H$

Definisi 2.2.6[Herstein, 1990]

Misalkan H suatu subgrup dari G dan $a \in G$. $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ disebut koset kanan yang memuat a dari H di G dan $aH = \{ah \mid h \in H\}$ disebut koset kiri yang memuat *a dari H di G.*

Definisi 2.2.7 [Herstein, 1990]

Misalkan G suatu grup dan N suatu subgrup dari G. N disebut subgrup normal dari G jika setiap $g \in G$ dan setiap $n \in N$ berlaku $gng^{-1} \in N$

Teorema 2.2.8 [Herstein, 1990]

Misalkan G suatu grup dan N suatu subgrup normal dari G. Tulis $G/N = \{Na \mid a \in G\}$. Defenisikan $NaNb = Nab$, untuk setiap Na dan Nb di G/N. Maka G/N membentuk grup terhadap operasi tersebut.

Bukti :

1. Akan ditunjukkan G/N tertutup

   Ambil sebarang $a,b \in G$, akan dibuktikan $NaNb \in G/N$

   Perhatikan bahwa:

   $NaNb = Nab$ (defenisi operasi G/N)

   Karena $a,b \in G$ dan G grup maka $ab \in G$

   $= Nc$ ($ab \in G$ dan G grup maka $c \in G$)

   Ini berarti $(Na)(Nb) \in \{Nc \mid c \in G\} = G/N$

2. Akan ditunjukkan G/N asosiatif

   Ambil sebarang Na, Nb dan $Nc \in G/N$.

   Perhatikan bahwa :

   $Na(NbNc) = (Na)(Nbc)$ (N subgrup normal)

   $= N(a(bc))$

   $= N(ab)c$ (N subgrup normal)

   $= NabNc$

   $= (NaNb)Nc$

   $= ((Na)(Nb))Nc$

   Jadi G/N bersifat asosiatif.

3. Akan ditunjukkan terdapat identitas di G/N

   Misalkan Ng identitas di G/N

Ambil sebarang Na $\in$ G/N. Karena Ng identitas di G/N, maka:

$$(Na)(Ng) = Na$$
$$N(ag) = Na$$
$$ag = a$$
$$a^{-1}ag = a^{-1}a$$
$$eg = e$$
$$g = e$$

Karena g = e maka Ng = Ne

Ini berarti ada unsur identitas Ne $\in$ G/ N

4. Akan ditunjukkan setiap unsur di G/N mempunyai invers.

   Ambil Na $\in$ G/N sebarang

   Misalkan Nh invers dari Na. Maka:

$$(Na)(Nh) = Ne$$
$$N(ah) = Ne$$
$$N(ah) = Ne$$
$$(ah) = e$$
$$a^{-1}ah = a^{-1}e$$
$$eh = a^{-1}$$
$$h = a^{-1}$$
$$Nh = Na^{-1}$$

   Ini berarti Na^{-1} invers dari Na ,Jadi setiap unsur di G/N mempunyai invers.

Definisi 2.2.9 [Herstein, 1990]

Misalkan G suatu grup dan N suatu subgrup normal dari G. Grup G/N disebut grup faktor.

Definisi 2.2.10 [Herstein, 1990]

Misalkan $(G,\circ)$ dan $(G',*)$ adalah grup dan f suatu pemetaan dari G ke G'. Pemetaan f disebut suatu pemetaan homomorfisma dari G ke G' jika setiap $a,b \in G$ berlaku $f(a \circ b) = f(a)*f(b)$.

Definisi 2.2.11 [Herstein, 1990]

Misalkan $(G,\circ)$ dan $(G',*)$ adalah grup dan f suatu pemetaan homomorfisma dari G ke G'. Pemetaan f disebut isomorfisma jika f bersifat satu-satu dan pada.

Definisi 2.2.12 [Herstein, 1990]

Misalkan G dan G' masing-masing adalah grup dan f suatu pemetaan homomrfisma dari G ke G'. Himpunan $Ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = e',$ e' unsur identitas di G'$\}$disebut Kernel dari pemetaan homomorfisma f.

BAB III

METODOLOGI PENILITIAN

3.1. Waktu dan Tempat

Penelitian ini dilaksanakan mulai bulan Desember 2007 sampai dengan Juni 2008. Tempat penelitian adalah di Perpustakaan Jurusan Matematika FMIPA dan perpustakaan Pascasarjana Universitas Andalas Padang.

3.2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur (library research). Pada metode ini peneliti akan berupaya mengumpulkan literatur (buku dan jurnal ilmiah) yang relevan sebagai sumber utama penelitian ini. Jadi data utama dalam penelitian ini di ambil dari jurnal-jurnal ilmiah dan buku-buku teks yang berhubungan dengan Matriks Ortogonal dan Aljabar abstrak.

UNTUK KEDJAJAAN BANGSA

UNIVERSITAS ANDALAS

BAB IV

PEMBAHASAN

Definisi 4.1 (Anton, H. dan Rorres, C. 2004)

Misalkan A adalah matriks nxn, matriks A dikatakan matriks orthogonal jika $A^tA = AA^t = I$, atau $A^t = A^{-1}$ dengan A^t adalah matriks transfose dari matriks A, A^{-1} adalah matriks invers dari A, dan I adalah matriks identitas.

Teorema 4.2(Khanna, V.J. dan Bhambri, S.K. 1993)

Jika A matriks ortogonal maka det (A) = ± 1

Bukti:

Misalkan A adalah matriks orthogonal maka menurut definisi 3.1, $AA^t = I$. Akibatnya

$$\begin{aligned} \det(AA^t) &= \det(I) \\ &= 1 \text{ dan} \\ \det(AA^t) &= \det(A)\det(A^t) \text{ atau} \\ \det(A)\det(A^t) &= \det(I) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Karena $\det(A) = \det(A^t)$ maka

$$\det(A)\det(A) = 1 \text{ atau } \det(A) = \pm 1$$

Teorema 4.3 (Khanna, V.J. dan Bhambri, S.K. 1993)

Jika **O(n,R)** menyatakan himpunan matriks ortogonal nxn dengan entri-entri bilangan riel, maka **O(n,R)** membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks.

Bukti: Misalkan **O(n,R)** menyatakan himpunan matriks ortogonal nxn dengan entri-entri bilangan riel. Akan ditunjukkan bahwa **O(n,R)** membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks, yaitu:

(1) **O(n,R)** bersifat tutup terhadap terhadap operasi perkalian matriks,

(2) **O(n,R)** bersifat asosiatif terhadap operasi perkalian matriks,

(3) **O(n,R)** mempunyai unsur identitas terhadap operasi perkalian matriks.

(4) setiap unsur di **O(n,R)** mempunyai invers terhadap operasi perklaian matriks.

(1). Akan ditunjukkan bahwa setiap $A,B \in$ **O(n,R)** berlaku $AB \in$ **O(n,R)**, yaitu

$$(AB)(AB)^t = I$$

Ambil sebarang $A, B \in$ **O(n,R)** , maka menurut Definisi 3.2 $AA^t = I$ dan $BB^t = I$. Akibatnya

$$\begin{aligned}(AB)(AB)^t &= ABB^tA^t \\ &= AIA^t \\ &= I.\end{aligned}$$

Karena $A, B \in$ **O(n,R)** diambil sebarang maka dapat disimpulkan bahwa setiap $A, B \in$ **O(n,R)** berlaku $(AB)(AB)^t = I$. Ini berarti, **O(n,R)** bersifat tutup terhadap operasi perkalian matriks.

(2). Akan ditunjukkan bahwa setiap $A, B, C \in$ **O(n,R)** berlaku $A(BC) = (AB)C$

Ambil sebarang $A, B, C \in$ **O(n,R)**. Karena A, B, C adalah matriks dan perkalian matriks senantiasa bersifat asosiatif, maka berlaku $A(BC) = (AB)C$.

(3). Akan ditunjukkan bahwa ada $B \in$ **O(n,R)** sehingga setiap $A \in$ **O(n,R)** berlaku $AB = BA = A$. Pilih $B = I$ (matriks identitas 2x2), maka $I \in$ **O(n,R)** dan setiap $A \in$ **O(n,R)** berlaku

AI = I A = A.

Ini berarti, I adalah unsur identitas di **O(n,R)** terhadap operasi perkalian matriks.

(4). Akan ditunjukkan bahwa setiap unsur di **O(n,R)** mempunyai invers.

Ambil sebarang $A \in$ **O(n,R)**, akan ditunjukkan ada $B \in$ **O(n,R)** sehingga AB BA= I.

Karena $A \in$ **O(n,R)** maka $A^tA = AA^t = I$. Pilih $B = A^t$, maka $B \in$ **O(n,R)** dan AB = BA= I. Ini berarti, $B = A^t$ merupakan invers dari A.

Teorema 4.4 (Khanna, V.J. dan Bhambri, S.K. 1993)

Jika **GL(n,R)** = $A = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad \det(A) \neq 0 \right\}$ maka **GL(n,R)** membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa **GL(n,R)** membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks, yaitu:

(1) **GL(n,R)** bersifat tutup terhadap terhadap operasi perkalian matriks,

(2) **GL(n,R)** bersifat asosiatif terhadap operasi perkalian matriks,

(3) **GL(n,R)** mempunyai unsur identitas terhadap operasi perkalian matriks,

(4) Setiap unsur di **GL(n,R)**mempunyai invers terhadap operasi perkalian matriks.

(1) Akan ditunjukkan bahwa setiap $A,B \in$ **GL(n,R)** berlaku $AB \in$ **GL(n,R),** yaitu $\det(AB) \neq 0$

Ambil sebarang $A, B \in$ **GL(n,R)**, maka $\det(A) \neq 0$ dan $\det(B) \neq 0$**.** Akibatnya

$\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$

Karena A, $B \in$ **GL(n,R)** diambil sebarang maka dapat disimpulkan bahwa setiap A, $B \in$ **GL(n,R)** berlaku $\det(AB) \neq 0$. Ini berarti, **GL(n,R)** bersifat tutup terhadap operasi perkalian matriks.

(2) Akan ditunjukkan bahwa setiap A, B, $C \in$ **GL(n,R)** berlaku A(BC) = (AB)C.

Ambil sebarang A, B, $C \in$ **GL(n,R)**. Karena A, B, C adalah matriks dan perkalian matriks senantiasa bersifat asosiatif, maka berlaku A(BC) = (AB)C.

(3) Akan ditunjukkan bahwa ada $B \in$ **GL(n,R)** sehingga setiap $A \in$ **GL(n,R)** berlaku.

AB = BA = A.

Pilih B = I (matriks identitas nxn), maka $I \in$ **GL(n,R)** dan setiap $A \in$ **GL(n,R)** berlaku

AI = I A = A.

Ini berarti, I adalah unsur identitas di **GL(n,R)** terhadap operasi perkalian matriks.

(4) Akan ditunjukkan bahwa setiap unsur di **GL(n,R)** mempunyai invers.

Ambil sebarang $A \in$ **GL(n,R)**, akan ditunjukkan ada $C \in$ **GL(n,R)** sehingga AC = CA= I. Karena $A \in$ **GL(n,R)** maka $\det(A) \neq 0$, akibatnya A mempunyai invers, yaitu ada matriks C sehingga sehingga AC = CA= I.

Teorema 4.5 (Khanna, V.J. dan Bhambri, S.K. 1993)

O(n,R) merupakan subgrup dari **GL(n,R)**

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa **O(n,R)** merupakan subgrup dari **GL(n,R)**, yaitu:

(1) **O(n,R)** $\subseteq$ **GL(n,R)**,

(2) $\mathbf{O(n,R)} \neq \phi$,

(3) Setiap A, $B \in \mathbf{O(n,R)}$ berlaku $AB^{-1} \in \mathbf{O(n,R)}$.

(1) Untuk setiap $A \in \mathbf{O(n,R)}$ maka $A \in \mathbf{GL(n,R)}$ dengan demikian $\mathbf{O(n,R)} \subseteq \mathbf{GL(n,R)}$.

(2) Karena $\mathbf{O(n,R)}$ memuat I (matriks identitas nxn) maka $\mathbf{O(n,R)} \neq \phi$.

(3) Ambil sebarang A, $B \in \mathbf{O(n,R)}$

Kasus 1. Kedua determinan A dan B bertanda sama, akibatnya

$$\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = 1$$

Kasus 2. Kedua determinan A dan B berbeda tanda, akibatnya

$$\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = -1.$$

Ini berarti, $\det(AB^{-1}) = \pm 1$. Berdasarkan teorema yaitu $AB^{-1} \in \mathbf{O(n,R)}$.

Teorema 4.6 (Khanna, V.J. dan Bhambri, S.K. 1993)

Jika $M \in \mathbf{O(n,R)}$ dengan $\det(M) = 1$ dan M tetap, maka pemetaan $f : \mathbf{O(n,R)} \rightarrow \mathbf{O(n,R)}$, dengan $f(A) = MAM^{-1}$ untuk setiap $A \in \mathbf{O(n,R)}$ merupakan pemetaan isomorfisma.

Bukti:

Misalkan $M \in \mathbf{O(n,R)}$ dengan $\det(M) = 1$ dan M tetap, akan ditunjukkan bahwa pemetaan $f : \mathbf{O(n,R)} \rightarrow \mathbf{O(n,R)}$, dengan $f(A) = MAM^{-1}$ untuk setiap $A \in \mathbf{O(n,R)}$ merupakan pemetaan isomofisma, yaitu:

(1) f pemetaan homomorfina dari $\mathbf{O(n,R)}$ ke $\mathbf{O(n,R)}$,

(2) f bersifat satu-satu, dan

(3) f bersifat pada.

(1) Ambil A, $B \in$ **O(n,R),** maka $f(A) = MAM^{-1}$ dan MBM^{-1}. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(AB) &= M(AB)M^{-1} \\ &= M(AIB)M^{-1} \\ &= M(A(M^{-1}M)B)M^{-1} \\ &= (MAM^{-1})(MBM^{-1}) \\ &= f(A)f(B). \end{aligned}$$

Ini berarti, f merupakan pemetaan homomorfisma dari **O(n,R)** ke **O(n,R)**.

(2) Ambil sebarang A, $B \in$ **O(n,R)** dengan f(A) = f(B), maka $MAM^{-1} = MBM^{-1}$. Karena **O(n,R)** suatu grup dan M, M^{-1}, A, $B \in$ **O(n,R)** maka berlaku hukum pembatalan kiri dan kanan. Akibatnya, dari hubungan f(A) = f(B) yaitu $MAM^{-1} = MBM^{-1}$ diperoleh A = B. Ini berarti, f pemetaan satu-satu.

(3) Ambil sebarang $Y \in$ **O(n,R),** pilih $X = M^{-1}YM$, maka

$f(X) = M(M^{-1}YM)M^{-1} = (MM^{-1})Y(MM^{-1}) = Y$.

Ini berarti, f pemetaan pada.

Teorema 4.7 (Khanna, V.J. dan Bhambri, S.K. 1993)

Jika **SO(n,R)** merupakan himpunan semua matriks ortogonal yang determinannya sama dengan satu maka **SO(n,R)** merupakan subgrup normal dari **O(n,R).**

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa SO(n,R) merupakan sub grup dari O(n,R) yaitu:
   a. **SO(n,R)** $\neq \phi$,
   b. **SO(n,R)** $\subseteq$ **O(n,R)**,
   c. Setiap A, $B \in$ S**O(n,R)** berlaku $AB^{-1} \in$ S**O(n,R)**.

a). Karena SO(n,R) memuat I (Matriks identitas) maka SO(n,R) $\neq \phi$

b). Karena **O(n,R)** merupakan himpunan matriks ortogonal yang determinannya 1 atau -1, dan SO(n,R) adalah himpunan matriks ortogonal yang determinannya 1 maka jelas **SO(n,R)** $\subseteq$ **O(n,R)**

c). Ambil sebarang A,B $\in$ SO(n,R)

dengan det(A) = det(B) = 1 akibatnya

$$\begin{aligned} \det(AB^{-1}) &= \det(A)\det(B^{-1}) \\ &= \det(A)\det(B) \\ &= 1.1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ini berarti det (AB^{-1}) = 1 , sehingga $AB^{-1} \in$ SO(n,R).

2. Akan ditunjukkan bahwa **SO(n,R)** merupakan subgrup normal dari **O(n,R),** yaitu setiap A $\in$ **O(n,R)** dan X $\in$ **SO(n,R)** berlaku $AXA^{-1} \in$ **SO(n,R).**

   Ambil sebarang X $\in$ **SO(n,R)** dan A $\in$ **O(n,R)**.Berarti det(X)=1 dan det(A)= $\pm$ 1 Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \det(AXA^{-1}) &= \det(A)\det(X)\det(A^{-1}) \\ &= \det(A)\det(A^{-1})\det(X) \\ &= \det(AA^{-1})\det(X) \\ &= \det(I)\det(X) \\ &= 1.\ 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ini berarti, setiap X $\in$ **SO(n,R)** dan A $\in$ **O(n,R)** berlaku $AXA^{-1} \in$ **SO(n,R)**.

Teorema 4.8 (Khanna, V.J. dan Bhambri, S.K. 1993)

Misalkan **G = O(n,R)** dan **N = SO(n,R),** grup faktor dari **G** oleh **N** adalah **G/N = {NA | A∈G}** . Periode dari **N** dan **NA** masing-masing adalah 1 dan 2.

Bukti:

Karena **N** merupakan subgrup normal dari **G** maka grup faktor dari **G** oleh **N** adalah **G/N = {NA | A∈G}**.

Karena **A∈G** maka ada 2 kemungkinan nilai determinan A yaitu:

1. det (A) = 1
2. det (A) = -1

Kasus 1

Ambil A∈G dengan det (A) = 1

Karena **N** merupakan unsur identitas pada grup faktor **G/N**, maka periode dari **N** adalah 1.

Kasus II

Ambil A∈**G** dengan det (A) = -1

Perhatikan bahwa det(A.A) = det(A)det(A)

= -1.-1

= 1 atau A.A∈**N**

sehingga $(NA)^2$ = **NANA**

= **NNAA**

= **NAA**

= **N**

Ini berarti, periode dari NA adalah 2.

BAB V
KESIMPULAN

Dari pembahasan pada bab IV dapat diambil beberapa kesimpulan, yaitu :

1. Jika A matriks ortogonal maka det (A) = ± 1.
2. Jika **O(n,R)** menyatakan himpunan matriks ortogonal nxn dengan entri-entri bilangan riel, maka **O(n,R)** membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks.
3. Jika **GL(n,R)** = $\left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{, } \det(A) \neq 0 \right\}$ maka **GL(n,R)** membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks.
4. **O(n,R)** merupakan subgrup dari **GL(n,R).**
5. Jika Jika M $\in$ **O(n,R)** dengan det(M) = 1 dan M tetap, maka pemetaan f : **O(n,R)** $\rightarrow$ **O(n,R)**, dengan f(A) = MAM^{-1} untuk setiap A $\in$ **O(n,R)** merupakan pemetaan isomofisma.
6. Jika **SO(n,R)** merupakan himpunan semua matriks ortogonal yang determinannya sama dengan satu maka **SO(n,R)** merupakan subgrup normal dari **O(n,R).**
7. Misalkan **G = O(n,R)** dan **N = SO(n,R)** grup faktor dari **G** oleh **N** adalah **G/N = {NA | A$\in$G}** , Periode dari **N** dan **NA** masing-masing adalah 1 dan 2.

DAFTAR PUSTAKA

1. Anton, H. dan Rorres, C. (2004). *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

2. Arnawa, I M. (2006). *Meningkatkan Kemampuan Pembuktian Mahasiswa dalam Aljabar Abstrak melalui pembelajaran Berdasarkan Teori APOS*. Disertasi SPS UPI. Bandung: Tidak diterbitkan.

3. Dubinsky, E. dan Leron, U. (1994). Learning Abstract Algebra with ISETL. New York: Springer-Verlag.

4. Durbin, J.R. (1992). *Modern Algebra*. New York: John Wiley dan Sons.

5. Fraleigh, J.B. (1994). *A first Course in Abstract Algebra*. New York: Addison-Wesley.

6. Herstein, I.N. (1975). *Topics in Algebra*. New York: John Wiley dan Sons.

7. Herstein, I.N. (1990). *Abstract Algebra*. New York: Macmillan Publishing Company.

8. Khanna, V.J. dan Bhambri, S.K. (1993). *A Course in Abstract Algebra*. New Delhi: Vikas Publishing House.

9. Muchlisah, N (2005). Teori Grup dan terapannya. Lembaga Pengembangan Pendidik. UPT UNS, Surakarta.

10. Raisinghania, M.D. dan Aggarwal, R.S. (1980). Modern Algebra. New Delhi: S. Chand dan Company.